

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Э. БАУМАНА

**Главные кривизны оболочки камеры ракетного
двигателя и возникающие в ней внутренние
усилия**

Мещанинов Н.
ФН2-42.

Руководитель: Зарубин В. С.

Москва 2003

1 Главные радиусы кривизны

Поскольку оболочка сопла двигателя представляет собой поверхность вращения, то ее радиусы кривизны являются главными. Поэтому меридиональные радиусы ρ_m для каждой из областей можно выписать сразу:

- Область I и IV : $\rho_m = \infty$,
- Область II: $\rho_m = r'$,
- Область III: $\rho_m = r''$.

Для определения радиуса кривизны нормального сечения нам понадобятся

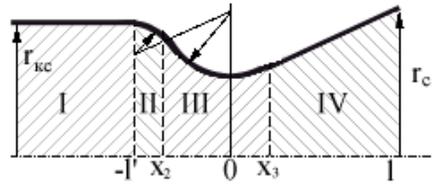


Рис. 1:

координаты точек сопряжения областей (II,III) и (III,IV). Для этого рассмотрим образующую оболочки.

1.1 Область сопряжения (II,III)

Определим угол ξ , необходимый нам в дальнейшем. Очевидно (см. рисунок), что

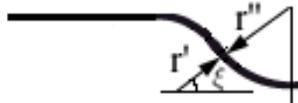


Рис. 2:

$$\cos \xi = \frac{l'}{r' + r''},$$

Тогда координата сопряжения областей будет:

$$x_2 = -l' + r' \cdot \cos \xi = -l' + \frac{r' l'}{r' + r''} = \frac{-l' r''}{r' + r''} \quad (1)$$

1.2 Область сопряжения (III,IV)

Указанные области сопрягаются таким образом, чтоб касательная к окружности в точке сопряжения x_3 из области III совпадала с прямолинейной образующей

конической части области (IV). Уравнение дуги окружности области III будет:

$$y(x) = -\sqrt{r''^2 - x^2} + D,$$

где $D = r'' + r_{kp}$. Поэтому угловой коэффициент конической образующей (и касательной к окружности) будет:

$$k = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{\sqrt{r''^2 - x^2}}. \quad (2)$$

Таким образом, если уравнение прямолинейной образующей

$$L(x) = kx + b,$$

то слагаемое b и координата сопряжения x_3 определяются из системы:

$$\begin{cases} \frac{x_3}{\sqrt{r''^2 - x_3^2}} \cdot l + b = r_c \\ \frac{x_3^2}{\sqrt{r''^2 - x_3^2}} + b = D - \sqrt{r''^2 - x_3^2} \end{cases} \quad (3)$$

Этому уравнению удовлетворяет следующее значение x_3

$$x_3 = \frac{l \cdot r''^2 + \sqrt{l^2 r''^4 - K [l^2 + (r_c - D)^2]}}{l^2 + (r_c - D)^2}, \quad (4)$$

где $K = r''^4 - [(r_c - D)r'']^2$. Выражение для b приводить не будем ввиду его громоздкости.

1.3 Общее выражения для ρ_t

Учитывая полученные выше результаты, приведем составную формулу для ρ_h , которая нам понадобится в дальнейшем, в частности, для определения ρ_t .

$$\rho_h(x) = \begin{cases} r_{kc} & , \quad -\infty \leq x \leq -l \\ \sqrt{r''^2 - (x + l')^2} + r_{kc} - r' & , \quad -l' < x < -\frac{l'r''}{r' + r''} \\ -\sqrt{r''^2 - x^2} + D & , \quad -\frac{l'r''}{r' + r''} \leq x < x_3 \\ kx + b & , \quad x_3 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

где x_3 определяется выражением 4, k выражением 2, а b определяется из системы 3.

В общем случае радиус кривизны ρ_t выражается по следующей формуле:

$$\rho_t = \frac{\rho_h}{\sin \theta},$$

где $\sin \theta$ - угол между нормалью к поверхности оболочки и осью симметрии. Поскольку выражение для $\sin \theta$ будет полезно как отдельный результат, то выпишем его значения, в зависимости от области:

$$\sin \theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in I \\ \frac{\rho_h(x) - (r_{kc} - r')}{r'} & , \quad x \in II \\ \frac{D - \rho_h(x)}{r''} & , \quad x \in III \\ \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & , \quad x \in IV \end{cases} \quad (6)$$

где I, II, III, IV - означают области в соответствии с рис. (1), а k определяется из выражения 2.

Теперь все готово для того, чтобы выписать выражения для ρ_t .

$$\rho_t(x) = \begin{cases} r_{kc} & , \quad x \in I \\ r' \left(1 + \frac{r_{kc} - r'}{\sqrt{r'^2 - (x+l')^2}} \right) & , \quad x \in II \\ r'' \left(\frac{D}{\sqrt{r''^2 - x^2}} - 1 \right) & , \quad x \in III \\ (kx + b)\sqrt{1+k^2} & , \quad x \in IV \end{cases} \quad (7)$$

2 Усилия

Усилия T_t и T_m , возникающие в главных направлениях, удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{T_m}{\rho_m} + \frac{T_t}{\rho_t} = p(x), \quad (8)$$

а также уравнению равновесия:

$$T_m 2\pi \rho_h \sin \theta = P_x, \quad (9)$$

где P_x - проекция сил давления на ось x . При этом давление неявно связано с ρ_h соотношением:

$$\frac{\pi \rho_h^2(x)}{F} = 2^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{k-1}{(k+1)^{\frac{k+1}{k-1}}}} \frac{(p^*/p(x))^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{1 - (p(x)/p^*)^{1-1/k}}}, \quad (10)$$

где $p^* = \text{const}$ - давление заторможенного потока продуктов сгорания. Проекция сил давления определяется из уравнения:

$$P_x = \iint_{\mathcal{L}} p(x) \cos \theta(x) d\mathcal{L},$$

где θ - имеет тот же смысл, что и раньше.

Однако заметим, что поверхностный интеграл можно свести к двойному следующим образом:

$$\iint_{\mathcal{L}} p(x) \cos \theta(x) d\mathcal{L} = \iint_D p(x) \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} dD, \quad (11)$$

где D - проекция участка оболочки \mathcal{L} на плоскость, перпендикулярную оси x .

2.1 Цилиндрический участок I

Рассмотрим этот участок отдельно, т.к. на нем радиусы кривизн постоянны и поэтому давление также остается величиной постоянной. Обозначим давление на этом участке p_{cyl} , оно определяется выражением 10.

Уравнение равновесия 9 примет вид:

$$2T_m \pi r_{kc} = \pi r_{kc}^2 p_{cyl},$$

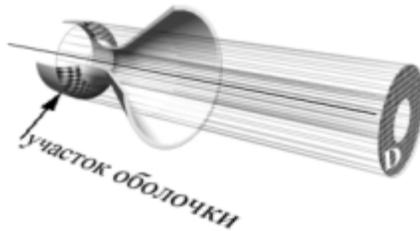
откуда

$$T_m = \frac{p_{cyl} \cdot r_{kc}}{2}.$$

2.2 Остальные участки

В областях II, III, IV воспользуемся общим выражением 11 для определения проекции сил давления. Учитывая, что сопло представляет собой поверхность вращения, то проекции участков поверхностей будут представлять собой кольца.

Поэтому брать интеграл по этим кольцам целесообразно в полярной



системе координат. По этим соображениям, введем систему координат следующим образом:

$$\begin{cases} z = \rho_h(x) \cos \alpha \\ y = \rho_h(x) \sin \alpha \end{cases}$$

Якобиан такой замены будет

$$\mathbb{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho_h(x)} & \frac{\partial y}{\partial \rho_h(x)} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\rho_h(x) \sin \alpha & \rho_h(x) \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho_h(x).$$

Поэтому интеграл 11 сведется к определенному интегралу Римана

$$2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho P(\rho) \text{sign}(\cos \theta) d\rho. \quad (12)$$

Функция $P(\rho)$ на самом деле представляет собой следующую функцию:

$$P(\rho) = P(\mathbf{inv}\rho(\rho)),$$

где $\mathbf{inv}\rho(\rho)$ - сопоставляет полярному радиусу проекции обложки, в зависимости от области, координату x . Очевидно, что при отсутствии условий, определяющих область интегрирования, эта функция не однозначна. Кроме того, даже в области III эта функция также многозначна. Поэтому при интегрировании необходимо ввести дополнительную подобласть III', которая располагается в пределах по x : $(0, x_3)$.

Теперь можно записать выражения для проекции сил давления на ось в зависимости от координаты x и области:

$$P_x(x) = P_{prev} + 2\pi \int_{r_{min}}^{\rho_h(x)} \rho P(\rho) \text{sign}(\cos \theta) d\rho, \quad (13)$$

где P_{prev} - проекция сил давления в предыдущих областях, r_{min} - минимальный радиус в текущей области.

2.3 Анализ соотношения 10

Для численного интегрирования (в квадратурах это будет сделать весьма затруднительно) нам необходимо проанализировать выражение 10. Прежде всего, для упрощения выкладок введем следующие обозначения:

$$\tilde{K} = 2^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{k-1}{(k+1)^{\frac{k+1}{k-1}}}}, \quad t = \frac{p(x)}{p^*}, \quad m = \frac{1}{k}, \quad (14)$$

Тогда выражение 10 переписется в виде:

$$\frac{\tilde{K} F}{t^m \sqrt{1-t^{1-m}}} = F(x),$$

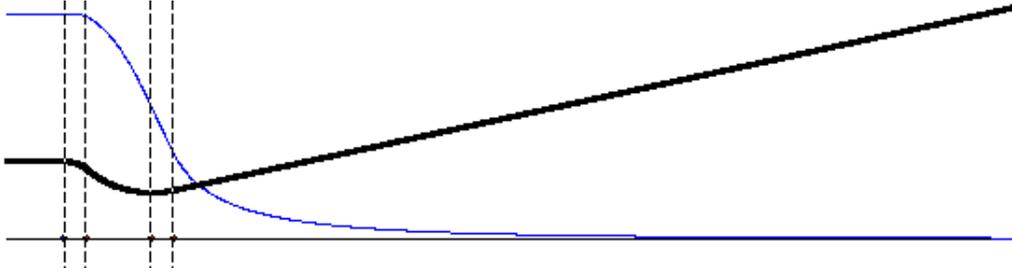
после очевидных преобразований:

$$\frac{(\tilde{K} r_{kp}^2)^2}{t^{2m} - t^{m+1}} = \rho_h^A(x). \quad (15)$$

Поскольку $k \in (1; 1.25]$, то $t \in (0; 1)$, что существенно облегчает поиск решения.

2.4 Функция давления

Теперь можно посмотреть каким образом распределяется давление по оболочке. Это можно сделать следующим образом. Двигаясь по контуру оболочки, будем находить корни уравнения 15. Поскольку их, в общем случае, два, то заметим тот факт, что давление должно падать, так как газ не может двигаться из области низкого давления в область высокого. В процессе вычисления, было замечено, что ложное решение вело себя как раз наоборот: все время увеличивалось. Это наблюдение позволило отбросить лишнее решение. Характер распределения давления представлен на рисунке.



2.5 Распределение усилий вдоль контура оболочки

Усилие T_m найдем используя уравнения равновесия 9 и полученное выражение для сил давления 13. Поэтому:

$$T_m(x) = \frac{P_{prev} + 2\pi \int_{r_{min}}^{\rho_h(x)} \rho P(\mathbf{inv}\rho(\rho)) \text{sign}(\cos \theta) d\rho}{2\pi \sin \theta \rho_h(x)}, \quad (16)$$

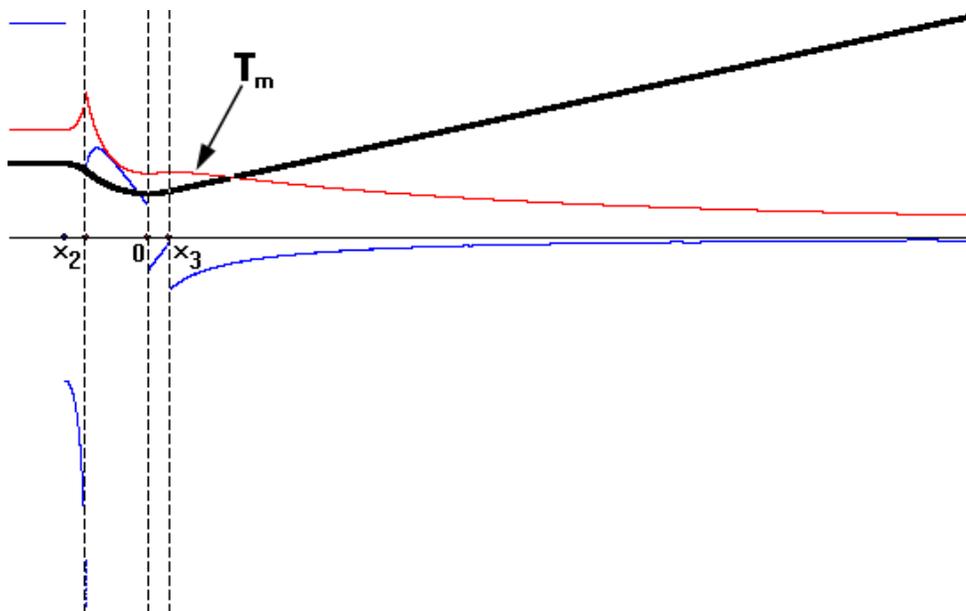
выражение для $\sin \theta$ было получено ранее, см. формулу 6.

Из уравнения Лапласа 8 можно найти усилие T_t

$$T_t = \begin{cases} \left(P_x(x) - \frac{T_m(x)}{r'} \right) \frac{\rho_h(x)}{\sin \theta} & , \quad x \in II \\ \left(P_x(x) - \frac{T_m(x)}{r''} \right) \frac{\rho_h(x)}{\sin \theta} & , \quad x \in III, III' \\ P_x(x) \frac{\rho_h(x)}{\sin \theta} & , \quad x \in IV \end{cases}$$

Для построения распределений усилий вдоль контура целесообразно не вычислять каждый раз интеграл в числителе выражения 16 в указанных пределах, а разбить контур на маленькие части (хорошие результаты получаются уже при разбиении на 1000 частей каждой из областей II, III, III', IV) и брать интеграл по ним, но введя дополнительную переменную, накапливающую сумму всех интегралов. Тогда, в силу аддитивности определенного интеграла,

в этой переменной будет храниться значение суммарной силы давления.
Распределение усилий представлено на рисунке ниже.



Список литературы

- [1] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. (Серия Механика в техническом университете).
- [2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: "Наука", 1970. 656 с.