Московский государственный университет им Н.Э. Баумана

Орбитальное движение в многомерном пространстве

Мещанинов Н. ФН2-32
Руководитель: Зарубин В.С.

Декабрь 2002

1 Постановка задачи

Предположим, что тело (например спутник) находится в гравитационном поле массивного тела (планеты или звезды) на расстоянии r_0 от его центра. В некоторый момент времени ему сообщили скорость v_0 под углом α к линии, соединяющей центр массивного тела и вращающийся объект. Предположив, что сила тяготения определяется соотношением

$$F = \frac{k}{r^{n-1}},$$

необходимо определить траекторию движения.

2 Решение

2.1 Допущения

Прежде всего необходимо отметить, что мы будем рассматривать скорости, которые значительно меньше скорости света в вакууме. Кроме того, размеры вращающегося тела пренебрежимо малы, по сравнению с массивным телом. Иногда вместо словосочетания ‘массивное тело‘ мы будем употреблять слово ‘планета‘, а вместо ‘вращающееся тело‘ слово ‘спутник‘.

2.2 Вывод уравнения

Поскольку действует центральная сила, то, взяв начало координат в центре планеты, будем иметь

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Это уравнение дает решение

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{\zeta} = \overrightarrow{\mathrm{const}}. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь более подробно движение вокруг планеты. Как видно из рисунка изменение площади, заметываемой радиус-вектором спутника, можно представить так:

$$\Delta(\vec{S}) = \overrightarrow{OMM`} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r}).$$

Но тогда, деля обе части равенства на dt и устремляя к пределу, получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{S}) = \lim_{dt\to 0}(\vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{r}),$$

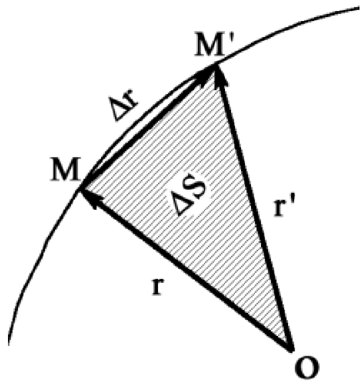


Рис. 1:

или

$$2\vec{V_S} = \vec{r} \times \vec{v}.$$

Тогда из выражения 1 и последнего равенства следует

$$|r \times v| = 2\frac{d}{dt}S = \zeta. \qquad (2)$$

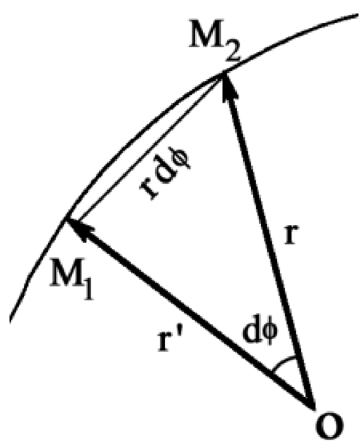


Рис. 2:

Перейдем к полярным координатам, исходя из геометрических соображений. Изменение площади можно приближенно выразить как площадь прямоугольного треугольника OM_1M_2 (рис. 2), которая равна:

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\phi,$$

откуда получаем

$$\frac{d}{dt}S = \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\phi. \qquad (3)$$

Из 2 и 3 видно, что

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = \zeta. \qquad (4)$$

Далее представим квадрат скорости спутника следующим образом:

$$v^2 = (\frac{d}{dr}r)^2 + r^2(\frac{d}{dt}\phi)^2 = v_r^2 + v_p^2. \qquad (5)$$

Преобразуем выражения для v_r и v_p, используя равенство 4:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\zeta}{r^2}\frac{dr}{d\phi}, \qquad (6)$$

$$v_p = r\frac{d\phi}{dt} = \frac{\zeta}{r}. \qquad (7)$$

Сделаем замену переменной

$$u = \frac{1}{r}.$$

Тогда выражение 5 для скорости примет вид

$$v^2 = \zeta^2\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right]. \qquad (8)$$

По теореме об изменении кинетической энергии, учитывая, что движение происходит в поле центральной силы, будем иметь

$$d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = F_r dr.$$

Деля обе части этого равенства на $d\phi$, получим

$$\frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{d\phi} = F_r\frac{dr}{d\phi}.$$

Используя формулу 8 , запишем

$$\frac{m\zeta^2}{2}\frac{d}{d\phi}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right] = F_r\frac{dr}{d\phi}.$$

Учитывая введенную замену, имеем

$$\frac{m\zeta^2}{2}\left(2\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u\frac{du}{d\phi}\right) = -F_r\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}. \qquad (9)$$

Окончательно имеем (если $\frac{du}{d\phi} \neq 0$ - этот случай тривиален и будет рассмотрен отдельно)

$$m\zeta^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u \right) = -F_r. \tag{10}$$

Константу ζ найдем из начальных условий, используя выражение 1:

$$\zeta = |r \times v| = r_0 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha,$$

где r_0 - расстояние от спутника до центра планеты, v_0 - начальная скорость (напомним, что мы рассматриваем только случаи, когда $v_0 \ll c, c$ - скорость света в вакууме, а α - угол между вектором скорости и радиус-вектором, соединяющим центр планеты и спутника. Поскольку в нашем случае сила F_r имеет вид

$$F_r = \frac{-km}{r^{n-1}},$$

то после разрешения уравнения 10 относительно производной получим

$$\frac{d^2}{d\phi^2} u(\phi) = \frac{ku(\phi)^{n-3}}{(r_0 v_0 \sin\alpha)^2} - u(\phi). \tag{11}$$

2.3 Решение уравнения

Введем новую переменную

$$z = \frac{du}{d\phi}.$$

Тогда уравнение 11 преобразуется к виду

$$\frac{zdz}{du} = \frac{ku^{n-3}(\phi)}{(r_0 v_0 \sin\alpha)^2} - u(\phi). \tag{12}$$

Из этого уравнения видно, что при $n \neq 2$ решение 12 будет иметь вид:

$$z^2 = \frac{2ku^{n-2}(\phi)}{n-2} - u^2(\phi) + \sigma,$$

где σ- постоянная интегрирования, которую можно найти из начальных условий. В самом деле, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{2ku^{n-2}(\phi)}{n-2} - u^2(\phi) + \sigma}. \tag{13}$$

Но так как

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi},$$

кроме того, из уравнения 6 следует, что

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{\zeta}\frac{dr}{dt}.$$

В начальный момент времени последнее выражение имеет вид (учитывая полученное нами значения для ζ)

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{v_0 \cos\alpha \cdot r_0^2}{v_0 \sin\alpha} = r_0^2 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Теперь можно записать выражение для σ

$$\sigma = \frac{1}{r_0^2} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{2k}{r_0^n(n-2)(v_0 \sin\alpha)^2}. \tag{14}$$

Обратимся теперь к выражению 13. Его структура такова, что дальнейшее интегрирование в квадратурах возможно лишь в случаях $n = 3$ и $n = 4$. Выпишем для каждого случая эти решения.

2.3.1 Тривиальный случай $\frac{du}{d\phi} = 0$

Заметим, для начала, что в процессе вывода уравнения 11 мы воспользовались неэквивалентным преобразованием, поделив уравнение 9 на $\frac{du}{d\phi}$. При этом мы могли потерять решение $\frac{du}{d\phi} = 0$. Это возможно в случае, когда $r = \text{const}$, т.е. траектория представляет собой окружность. Это тривиальный случай, нас же будет интересовать вариант, когда $\frac{du}{d\phi} \neq 0$.

2.3.2 Случай $n = 3$

Перепишем выражения 13 и 14 следующим образом:

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{2ku(\phi)}{\zeta^2} - u^2(\phi) + \sigma_{n=3}}, \tag{15}$$

$$\sigma_{n=3} = \frac{1}{r_0^2} - \frac{2k}{r_0^3(v_0 \sin\alpha)^2} - \operatorname{ctg}^2\alpha. \tag{16}$$

Уравнение 15 дает решение

$$\phi = \arcsin\frac{u(\phi) - \frac{k}{\zeta}}{\sqrt{\sigma_{n=3} + (\frac{k}{\zeta})^2}} + \Phi,$$

где

$$\Phi = -\arcsin\frac{\frac{1}{r_0} - \frac{k}{\zeta}}{\sqrt{\sigma_{n=3} + (\frac{k}{\zeta})^2}}$$

или

$$r(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{n=3} + \left(\frac{k}{\zeta}\right)^2} \cdot \sin(\phi - \Phi) + \frac{k}{\zeta}}.$$

2.3.3 Случай n=4

При таком значении параметра n выражения 13 и 14 принимают вид

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{u^2(\phi)(k-1) + \sigma_{n=4}}, \tag{17}$$

$$\sigma_{n=4} = \frac{1}{r_0^2} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{k}{r_0^4(v_0 \sin\alpha)^2}. \tag{18}$$

Решение уравнения 17 выглядит следующим образом:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \ln \Phi' \cdot \left(u(\phi)\sqrt{k-1} + \sqrt{u^2(\phi)(k-1) + \sigma_{n=4}}\right), \tag{19}$$

где

$$\Phi' = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0}\sqrt{k-1} + \sqrt{\frac{1}{r_0^2}(k-1) + \sigma_{n=4}}\right)}$$

2.3.4 Случай n=2

Рассмотрим теперь двумерный случай. При этом все выражения, котрые мы получили для σ и для $\frac{du}{d\phi}$ не имеют смысла, поэтому вернемся к уравнению 12. При $n = 2$ оно выглядит следующим образом:

$$z\frac{dz}{du} = \frac{k}{u(\phi)(r_0 v_0 \sin\alpha)^2} - u. \tag{20}$$

После интегрирования получим

$$\frac{du}{d\phi} = \pm\sqrt{\frac{2k\ln u(\phi)}{(r_0 v_0 \sin\alpha)^2} - u^2(\phi) + \sigma_{n=2}}, \tag{21}$$

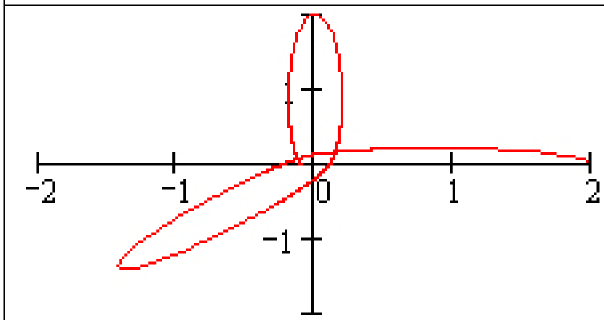
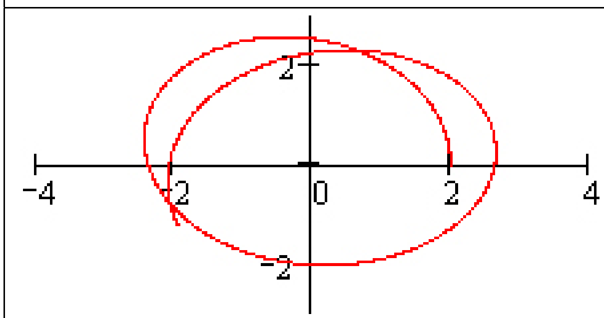
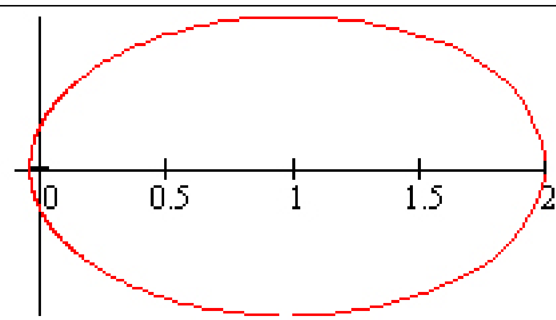
где

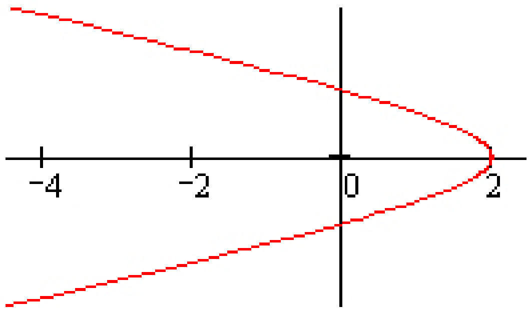
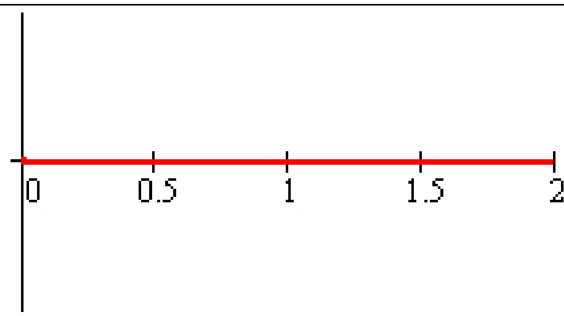
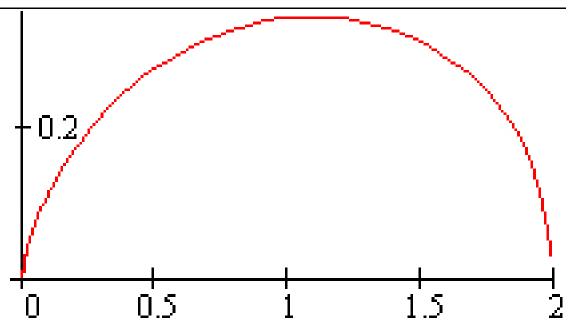
$$\sigma_{n=2} = \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{2k\ln r_0}{(r_0 v_0 \sin\alpha)^2} + \frac{1}{r_0^2}.$$

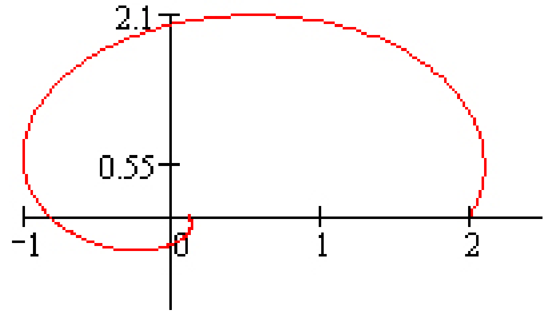
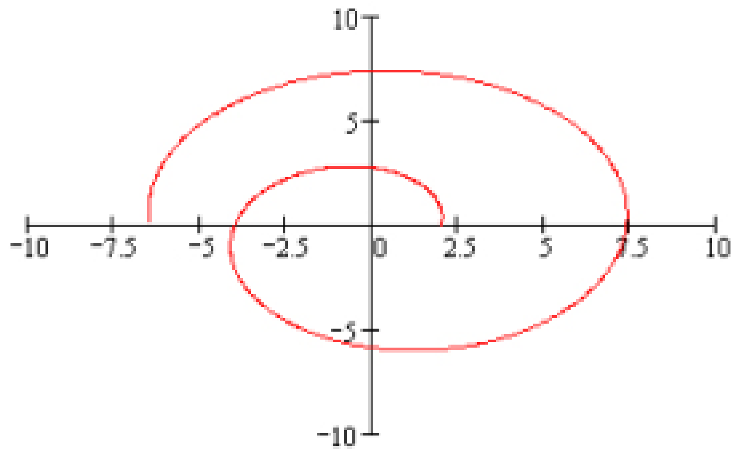
Дальнейшее интегрирование в квадратурах невозможно, поэтому мы проведем численное решение этого и других неинтегрируемых в квадаратурах случаев.

2.3.5 О методах, используемых при численном интегрировании

Для численного решения дифференциального уравнения 11 мы пользовались математическим пакетом MathCad 2001 Pro, при этом воспользовавшись встроенной функцией odesolve.

<table>
<tr><th>вид решения</th><th>начальные условия</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$\alpha = \frac{\pi}{4}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 0.31$, n=2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\alpha = \frac{\pi}{2}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 2$, n=2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\alpha = \frac{\pi}{3}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 2$, n=3</td></tr>
</table>

	$\alpha = \frac{\pi}{2}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 2$, n=3
	$\alpha = \frac{\pi}{2}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 0$, n=3
	$\alpha = \frac{\pi}{4}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 0.31$, n=4

<table>
<tr><td>
</td><td>$\alpha = \frac{\pi}{4}$,k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 1$, n=4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\alpha = \frac{\pi}{3}$, k=3, $r_0 = 2$, $v_0 = 0.971$, n=4</td></tr>
</table>